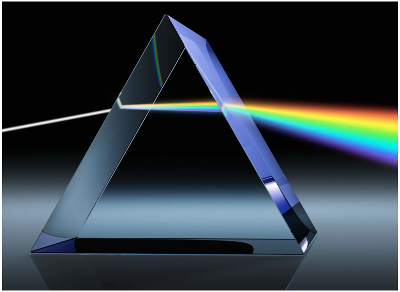
谱分析

我成分光三棱镜了!?

刘宁

浙江大学海洋学院

2023 年 10 月 19 日



refraction of light through a prism

浙江大学 ZHEJIANG UNIVERSITY

(单点) 流速分解

$$u(t) = \langle U \rangle + u'(t).$$

- $u(t)$： 瞬时流速；
- $\langle U \rangle = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} u(t_n)$： 时均流速；
- $u'(t)$： 脉动流速.

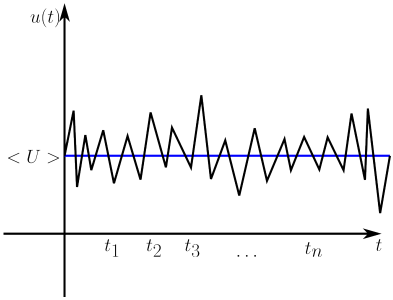


图 1: 流速分解示意图

问题

$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} u(t_n) = \mu_u$ 何时成立 (μ_u 为真实的平均流速)?

- $\{u(t)\}$ 为样本空间 S 上的随机过程[1] (stochastic process);
- $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} u(t_n)$ 为 μ_u 的点估计.

随机过程定义

A stochastic process is a mathematical object usually defined as a sequence of random variables, where the index of the sequence has the interpretation of time.

[1] 离散时间连续状态的随机过程

(宽) 平稳过程 (stationary process)

设 $X(t); t \in T$ 是二阶矩过程[2], 如果

- 对任意 $t \in T$, $\mu_X(t) = E(X(t)) = Constant$, 记为 μ_X;
- 对任意 $t, t+\tau \in T$, 自相关函数 $R_X(t, t+\tau) = E[X(t)X(t+\tau)]$, 只是时间差 τ 的函数, 记为 $R_X(\tau)$,

则 $\{X(t); t \in T\}$ 为宽平稳过程 (wide sense stationary process).

[2]若随机过程 $X(t), t \in T$ 是一个复或实值随机过程，若对任意的 $t \in T$，满足 $E(|X(t)|^2) < +\infty$，则称随机过程是二阶矩过程.

ZHEJIANG UNIVERSITY

各态历经过程 (ergodic process)

定义

设 $\{X(t); -\infty < t < \infty\}$ **为平稳过程, 令**

$$\langle X(t) \rangle = \lim_{T\to t} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t)\mathrm{d}t.$$

称为过程的时间均值; 对于任给的 τ**, 令**

$$\langle X(t)X(t+\tau) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} X(t)X(t+\tau)\mathrm{d}t. \tag{1}$$

称为过程的时间相关函数.

各态历经过程 (ergodic process)

定义

设 $\{X(t); -\infty < t < \infty\}$ 为平稳过程.

- 若

$$\langle X(t)\rangle = E[X(t)] = \mu_X.$$

  以概率 1 成立, 则过程的**均值具有各态历经性**,

- 若对于任给的实数 τ,

$$\langle X(t)X(t+\tau)\rangle = E\left[X(t)X(t+\tau)\right] = R_X(\tau). \quad (2)$$

  以概率 1 成立, 则过程的**均值具有各态历经性**,

- 若 $X(t)$ 的均值函数和自相关函数都具有各态历经性, 则称 $X(t)$ 是 **(宽) 各态历经过程 (ergodic process)**.

各态历经过程 (ergodic process)

一个反例: 平稳随机过程, 但不是各态历经过程.

设 $\{X(t) = Y; -\infty < t < \infty\}$, 其中 Y 为随机变量, $P(Y = 1) = P(Y = 0) = \frac{1}{2}$.

图 2: 猫 (from Introduction to Quantum Mechanics by David J. Griffiths)

回答: $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}u(t_n)=\mu_u$ 何时成立?

湍流统计分析的假设: Stationarity

湍流为各态历经过程[3].

那么 $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}u(t_n)=\mu_u$ 成立 (μ_u 为真实的平均流速).

[3] 各态历经过程是平稳过程的一个子集, 因此湍流也是平稳过程.

平稳过程的功率谱密度

随机信号 $f(t)$ 的平均功率为:

$$\overline{f^2}(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^2 dt.$$

普朗歇尔定理 (Parseval–Plancherel identity)

It states that the integral of a function's squared modulus is equal to the integral of the squared modulus of its frequency spectrum.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(\omega)\right|^2 d\omega. \tag{3}$$

此处傅里叶变换对为 $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-it\omega} dt; f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{it\omega} d\omega.$

平稳过程的功率谱密度

考虑随机信号 $f(t)$, 构造函数 $f_T(t)$:

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t), & t \in (-T, T) \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

由式 (1)(2), $f(t)$ 时间相关函数 $R(t)$ 为:

$$\begin{aligned} R_T(t) &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T-t} f(\tau)f(t+\tau)d\tau \\ &= \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} f_T(\tau)f_T(t+\tau)d\tau = \frac{1}{2T} f_T(t) * f_T(-t) \xrightarrow{T\to\infty} R(t). \end{aligned}$$

功率谱密度 $S(\omega)$ 定义为: ($S(\omega)$ 为 $R(t)$ 的傅里叶正变换)

$$S_T(\omega) = \frac{1}{2T}|\hat{f}_T(\omega)|^2 = \frac{1}{2T}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f_T(t)e^{-j\omega t}dt\right|^2 \xrightarrow{T\to\infty} S(\omega). \tag{4}$$

平稳过程的功率谱密度

平均功率 $\overline{f^2}(t)$ 与功率谱密度 $S(\omega)$ 的关系

由功率谱密度的定义 (式 (4)) 和普朗歇尔定理 (式 (3)) 知:

$$\overline{f^2}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)d\omega.$$

功率谱密度 $S(\omega)$ 与相关函数 $R(t)$ 的关系

维纳-辛钦定理 (Wiener-Kinchin theorem):

$$R(t) \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons}} S(\omega).$$

相关函数 $R(t)$ 与随机信号 $f(t)$ 的关系

$$R(t) = \langle f(\tau)f(\tau+t)\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(\tau)f(\tau+t)d\tau = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T} f_T(t) * f_T(-t).$$

泰勒冻结假定：时间到空间的转换

Motivation

- 通过单点测量的时间序列得到空间两点的互相关函数.

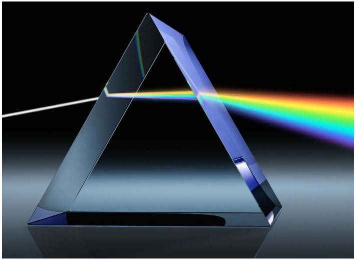


图 3: 三棱镜分光得到光谱

泰勒冻结假定：时间到空间的转换

Definition

An assumption that advection contributed by turbulent circulations themselves is small and that therefore the advection of a field of turbulence past a fixed point can be taken to be entirely due to the mean flow.
It only holds if the relative turbulence intensity is small; that is,

$$\frac{u}{U} \ll 1.$$

where U is the mean velocity and u is the eddy velocity. Then the substitution $t = x/U$ is a good approximation.

$$R(t) \xrightarrow{t=\frac{x}{U}} R(\frac{x}{U}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega\frac{x}{U}}d\omega.$$

频率谱转换为波数谱

波数 k 与波长 λ 的关系:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

由前述 $R(\frac{x}{U})$ 的定义知:

$$\begin{aligned}
R(\frac{x}{U}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{j\omega\frac{x}{U}}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} US(\omega)e^{j\frac{\omega}{U}x}d\left(\frac{\omega}{U}\right) \\
&\overset{k=\frac{\omega}{U}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[US(Uk)\right]e^{jkx}dk \\
&\triangleq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{S}(k)e^{jkx}dk.
\end{aligned}$$

因此, 波数谱 $\tilde{S}(k) = US(Uk)$ 和空间相关函数 $R(\frac{x}{U})$ 满足: $R(\frac{x}{U}) \underset{\mathcal{F}^{-1}}{\overset{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons}} \tilde{S}(k)$.

预乘谱 (premultiplied spectra)

以白噪声为例, 功率谱密度为常数 $S(\omega) = S_0$.

$$S(\omega)\Delta\omega \sim \omega S(\omega)\Delta\log(\omega).$$

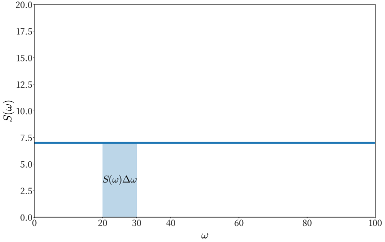


图 4: 白噪声功率谱

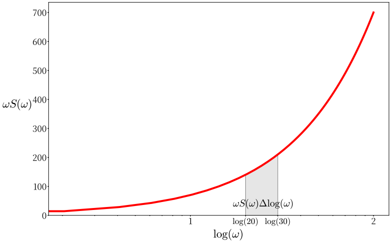


图 5: 白噪声预乘谱

ZHEJIANG UNIVERSITY

Example: correlation in PIV

See OpenPIV.

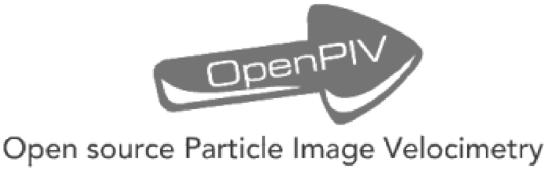


图 6: OpenPIV arrow

浙江大學
ZHEJIANG UNIVERSITY

附录

关于卷积时对 y 进行 zero padding 的原因, 见回答.

The correlation z of two d-dimensional arrays x and y is defined as:

```
z[...,k,...] = sum[..., i_l, ...] x[..., i_l,...] * conj(y[..., i_l - k,...])
```

This way, if x and y are 1-D arrays and `z = correlate(x, y, 'full')` then

$$z[k] = (x * y)(k - N + 1) = \sum_{l=0}^{||x||-1} x_l y^*_{l-k+N-1}$$

for $k = 0, 1, \dots, ||x|| + ||y|| - 2$

where $||x||$ is the length of `x`, $N = \max(||x||, ||y||)$, and y_m is 0 when m is outside the range of y.

图 7: correlation funciton in scipy